

# SPATII EUCLIDIENE

1. Să se calculeze produsul scalar al vectorilor:

a)  $\vec{v}_1 = (1, 3, -3, 4)$ ,  $\vec{v}_2 = (4, -5, 3, 1)$  în  $\mathbb{R}^4$ ;

b)  $\vec{w}_1 = (3, 2, -4, 0, 1)$ ,  $\vec{w}_2 = (-1, 1, -1, 4, -3)$  în  $\mathbb{R}^5$ ;

c)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  în  $M_2(\mathbb{R})$ ,

considerând că spațiile  $\mathbb{R}^4$  și  $\mathbb{R}^5$  sunt înfățișate cu produsul scalar standard (canonic), iar produsul scalar în spațiul vectorial  $M_2(\mathbb{R})$  al matricelor pătrate de ordinul doi este dat de

$$A \cdot B = \text{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ki} b_{ki}, \text{ oricare}$$

să fie matricele  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  cu

elementele numere reale, prin "tr" înțelegând urma matricei dintr-o paranteză, adică suma elementelor de pe diagonala principală a matricei produs  $A^T B$ .

Răspuns. a)  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -16$ ; b)  $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 0$ ; c)  $AB = 7$ .

2. În spațiul euclidian  $\mathbb{R}^2$  prevăzut cu produsul scalar standard (canonic sau uzual) se consideră vectorii  $\vec{v}_1 = (1, 2\alpha)$  și  $\vec{v}_2 = (\beta, -2)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Când cei doi vectori formează o bază ortogonală? Pentru  $\alpha = \beta = 1$  să se arate că cei doi vectori au lungimile egale (normele egale).

Răspuns. Se impune condiția  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \beta = 4\alpha$ .  
Pentru  $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = \sqrt{5}$ .

3. Fie vectorii din  $\mathbb{R}^3$ :

a)  $\vec{v}_1 = (1, -1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (\alpha, \beta, -1)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;

b)  $\vec{w}_1 = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{w}_2 = (1, \lambda, 1)$ ,  $\vec{w}_3 = (1, 2, \mu)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Pentru ce valori ale parametrilor reali  $\alpha, \beta$ , respectiv  $\lambda, \mu$  vectorii sistemului  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ , respectiv  $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$  sunt ortogonali doi câte doi?

Răspuns. a)  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ; b)  $\lambda = -1$ ,  $\mu = 1$ .

4. Să se arate că aplicația " $\cdot$ ":  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$(*) \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2, \text{ unde}$$

$\vec{x} = (x_1, x_2)_B$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)_B$  iar  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  este o bază oarecare (nu neapărat cea canonică) din  $\mathbb{R}^2$ , este un produs scalar pe (în)  $\mathbb{R}^2$ .

În spațiul euclidian  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ , unde produsul scalar este cel de mai sus, să se calculeze produsul scalar al vectorilor  $\vec{x} = (1, 1)_B$ ,  $\vec{y} = (-3, 2)_B$ , normele (lungimile) acestora, precum și unghiul dintre ei.

Răspuns. Se arată că aplicația (\*) satisface axiomele din definiția produsului scalar, pe un spațiu vectorial real (vezi notite curs). Apoi,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 4; \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{5}; \quad \|\vec{y}\| = \sqrt{5}; \quad \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{5} \sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$$

5. Să se arate că vectorii  $\vec{f}_1 = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{f}_2 = (-1, 1, 1)$  și  $\vec{f}_3 = (1, 0, 1)$  sunt linear independenți și apoi ortonormați baza formată în acestia în  $\mathbb{R}^3$ .

Rezolvare. Pentru independența liniară a sistemului de vectori  $B' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$  scriem matricea  $C$  de trecere de la baza canonică  $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$  din  $\mathbb{R}^3$  la sistemul  $B'$ . Avem "schema"

$$B \xrightarrow{C} B'$$

și se știe că matricea  $C$  are pe coloane coordonatele vectorilor  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  în baza  $B$ . Deci

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se știe de asemenea că  $B'$  este bază în  $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \det C \neq 0$ .

Avem  $\det C = 4 \neq 0 \Rightarrow B'$  este bază în  $\mathbb{R}^3$ .

De la sistemul de vectori  $B'$  trecem la sistemul de vectori  $B'' = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  ai căror vectori dorim să fie ortogonali doi câte doi. Nu ne împiedică nimic să luăm

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = \vec{f}_1 \\ \vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \alpha_{21} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_3 = \vec{f}_3 - \alpha_{31} \vec{g}_1 - \alpha_{32} \vec{g}_2 \end{cases}$$

Impunând condițiile:  $\vec{g}_1 \perp \vec{g}_2$  și  $\vec{g}_1 \perp \vec{g}_3, \vec{g}_2 \perp \vec{g}_3$

din prima condiție obținem  $\alpha_{21} = \frac{\vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|^2}$   
 $= \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \vec{g}_2 = \vec{f}_2 + \frac{1}{3}\vec{f}_1 = (-1, 1, 1) +$   
 $+ (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ . Așadar

$$\vec{g}_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}(1, 2, 1)$$

Rezultă  $\|\vec{g}_2\| = \frac{2}{3} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{2}{3} \sqrt{6}$ .

Impunând condițiile de ortogonalitate  $\vec{g}_1 \perp \vec{g}_2$  ( $\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = 0$ ) și  $\vec{g}_1 \perp \vec{g}_3$  ( $\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_3 = 0$ ), obținem

$$\alpha_{31} = \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|^2} \quad \alpha_{32} = \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{f}_2}{\|\vec{g}_2\|^2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{31} = \frac{0}{\|\vec{f}_1\|^2} = 0, \quad \alpha_{32} = \frac{0}{\|\vec{g}_2\|^2} = 0,$$

prin urmare  $\vec{g}_3 = \vec{f}_3$  și  $\|\vec{f}_3\| = \|\vec{g}_3\| = \sqrt{2}$ .

Vectorii  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  sunt ortogonali doi câte doi, însă nu au norme egale cu unitatea din  $\mathbb{R}^3$ ;  $\|\vec{g}_1\| = \|\vec{f}_1\| = \sqrt{3}$ ;

$$\|\vec{g}_2\| = \frac{2}{3} \sqrt{6} \text{ și } \|\vec{g}_3\| = \|\vec{f}_3\| = \sqrt{2}.$$

Trecem la sistemul de vectori ortonormat prin  $\vec{u}_1 = \frac{\vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|}$ ,  $\vec{u}_2 = \frac{\vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|}$  și  $\vec{u}_3 = \frac{\vec{g}_3}{\|\vec{g}_3\|}$ . Obținem

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3 \end{cases}$$

Pă se verifică că matricea de trecere de la baza canonică din  $\mathbb{R}^3$  la sistemul de vectori  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  este ortogonală.

6. Determinați valorile lui  $\lambda \in \mathbb{R}$  pentru care vectorii  $\vec{f}_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{f}_2 = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{f}_3 = (0, 0, \lambda)$  formează o bază în  $\mathbb{R}^3$ .

Pentru  $\lambda = 1$ , orthonormată baza respectiv

Răspuns.  $\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Baza orthonormată care se va găsi plecând de la baza (ca la  $\lambda = 1$ )

$$\vec{f}_1 = (1, 1, 0), \vec{f}_2 = (1, -1, 0), \vec{f}_3 = (0, 0, 1)$$

este

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_2$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_2$$

$$\vec{u}_3 = (0, 0, 1) = \vec{e}_3.$$

Observație Baza  $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  (care este orthonormată) se obține din baza canonică  $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ , de asemenea orthonormată, printr-o rotație de  $45^\circ$  în jurul lui  $\vec{e}_3$  care, după cum se vede din răspuns, rămâne neschimbat în procesul de orthonormare.

7. Arătați că vectorii  $\vec{f}_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{f}_2 = (1, -2, 0)$  și  $\vec{f}_3 = (0, 0, 1) = \vec{e}_3$  formează o bază în  $\mathbb{R}^3$ .

Orthonormată baza respectivă.

Răspuns.  $\vec{g}_1 = \vec{f}_1$ ;  $\vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \alpha_{21} \vec{g}_1 = (3, -3, 0)$ ,  $\vec{g}_3 = \vec{f}_3$ ,

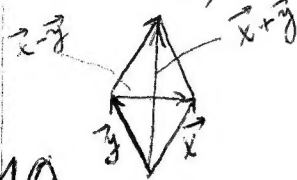
iar baza orthonormată este  $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} (3, -3, 0)$ ,  $\vec{u}_3 = \vec{e}_3$ .

8. Să se determine condiția în care vectorii  $\vec{f}_1 = (1, 1, \lambda)$ ,  $\vec{f}_2 = (1, \lambda, 1)$ ,  $\vec{f}_3 = (\mu, 1, 1)$  formează o bază în  $\mathbb{R}^3$ . Pentru  $\lambda = -1$  și  $\mu = 0$  să se orthonormeze baza respectivă.

Răspuns.  $(\lambda-1)[\mu(\lambda+1)-2] \neq 0$ . Baza orthonormată este:  $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, -1)$ ,  $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2, -1, 1)$ ,  $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 1)$ .

9. a) Să se arate că dacă norma unui vector provine dintr-un produs scalar și  $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$  atunci  $(\vec{x} - \vec{y}) \perp (\vec{x} + \vec{y})$ . b) Explicați rezultatul.

Răspuns a) se arată că  $(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 = 0$



b) Într-un "romb" diagonalele sunt perpendiculare. Vezi desenele din stânga.

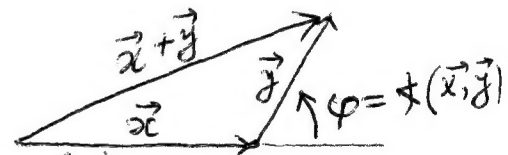
10.

Să se arate că dacă  $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ , unde prin  $(\vec{x}, \vec{y})$  am notat produsul scalar al vectorilor  $\vec{x}$  și  $\vec{y}$  dintr-un spațiu vectorial euclidian real, iar  $\|\vec{x}\|$  este norma (lungimea) vectorului  $\vec{x}$ , atunci

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2)$$

Dați o interpretare geometrică rezultatului.

Răspuns. Studiați desenele



și amintiți-vă de teorema cunoscută.

11. Să se demonstreze că într-un spațiu euclidian real  $\forall$  au loc egalitatea

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

Să se dea o interpretare geometrică rezultatului.

Răspuns Studiați desenele. Ce figură geometrică reprezintă ABCD?

